Paskaita 3

Šakų ir rėžių metodas.

Kaip kompromisą tarp vieno kintamojo funkcijų ir $n \geq 2$ kintamųjų funkcijų minimizavimo, nagrinėsime 2D atvejį:

Tegul $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ yra uždara, aprėžta, sritis

Spręsime uždavinį

$$\min_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} f(\vec{x})$$

Globalaus minimumo paieška.

Dažnai reikia rasti ir tašką, kuriame minimali reikšmė pasiekiama.

$$\arg \min_{\vec{x} \in \Omega} f(\vec{x})$$

Papildomai tarsime, kad žinome universalią konstantą L, kuri rodo, kad $f(\vec{X})$ yra Lipšico f-ja (tenkina Lipšico sąlygą)

Tada f yra tolydi ir globalaus minimumo taškas tikrai egzistuoja.

$$\boxed{|f(\vec{X}_1) - f(\vec{X}_2)| \leq L \, \|\vec{X}_1 - \vec{X}_2\|}$$

a) Natūralu, kad tokia konstanta L gali būti pakankamai grubus realybės įvertis

b) Kai kada pavyksta gauti (surasti) tikslesnes L reikšmes skirtingose srities Ω dalyse

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{M} \Omega_j \Rightarrow L_j \text{ srityje } \Omega_j$$

c) ar galima sudaryti algoritmą (euristiką) jei nežinome gana tikslios konstantos L, o turime tik tikėtiną artinį? Pastarąjį klausimą aptarsime paskaitos pabaigoje.

Algoritmas.

Pradinis artinys

Tarkime, kad Ω yra stačiakampis

$$\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$$

Tada

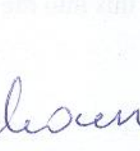
$$\bar{x}_G = \left(\frac{b_x + a_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2} \right) \quad f_G = f(\bar{x}_G).$$

Skaidymo žingsnis

Tarkime, kad turime stačiakampį

$$S = [a, b] \times [c, d]$$

Jį daliname į 9 stačiakampius (šis skaidymas gali būti pakeistas įvairiais variantais, kai daliname į 2, 3, 4 dalis)



$(\bar{x}_G)$.

Režių skaičiavimo žingsniai

a) Kiekvienam iš naujų stačiakampių apskaičiuojam $f(\vec{x})$ reikšmę šio stačiakampio ~~taške~~ centre $\vec{x}_{c_j}$.

Jeigu ši reikšmė jau buvo apskaičiuota centruose, tai nereikia atlikti šios algoritmo dalies (t.y. a-dalies)

b) Įvertiname, kokia mažiausia reikšmė gali būti gauta duotajame stačiakampyje:

$$f(\vec{x}) \geq \underbrace{f(\vec{x}_{c_j}) - L\cdot \mathrm{diam.}(S_j)}_{\tilde{f}_j}, \quad j=1,\dots,9.$$

c) Jeigu $\tilde{f}_j < f_G$ (prognozuojama, kad šiame stačiakampyje gali egzistuoti geresnis artinys), tai tokį stačiakampį saugome potencialių sričių sąraše.

žingsnyje b, kai skaičiuojame funkcijos f reikšmes padalinimo stačiakampių centruose, tai, surado geresnį tašką, nei kol kas žinomas, atnaujiname informaciją apie $\vec{X}_G$:

$$\vec{X}_G = \vec{X}_c, \quad f_G = f_c.$$

d) Potencialius stačiakampius saugome piramidės duomenų struktūroje. Piramidės viršūnėje (šaknyje) visada bus patalpintas tas stačiakampis, kurį prognozė yra dauginusia žadanti.

Aišku, tai nereiškia, kad minimumo taškas tikrai priklauso šiam stačiakampiui!

e) Kadangi f_G reikšmė dinamiškai kinta, tai patartina periodiškai piramidę „išvalyti": pašalinti neperspektyvius elementus

Užbaigę rėžių skaidymo žingsnį, grįžtame į skaidymo (šakų) žingsnį – iš piramidės šaknies ∓ imsime naują stačiakampį ir kartosime algoritmą.

Priminsime, kad pašalinus šaknies elementą, reikia atlikti piramidės atnaujinimą.

Dabar aptarsime atvejį, kai nežinome L parametro reikšmės. Tada galime konstruoti garantuotą algoritmą, bet

- L artinį apskaičiuojame iš turimos lokalios informacijos
- Nei vienos srities nepašaliname iš sąrašo, tik atidedame šio elemento analizę (rėžis – kombinuoja L ir elemento išmatavimus) – padid. L.

Taip organizuojama patikra populiariam algoritmo DIRECT protokole.

Euristikos variantai:

- įvertiname elemento rėžį kaip buvo aptarta DIRECT algoritme
- elementą pašaliname iš sąrašo, jeigu jis neperspektyvus